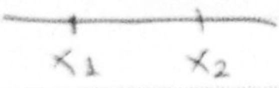
Εισαγωγή στις διαφ. εξισώσεις (15) 2-12-2019

Γ. Δ. Ε n-τάξης (tn)
* Β. σ. λ - Wronski - Liouville
* ομογενείς γ.δ.ε / εξισώσεις με σ.σ.
* Μέθοδος μεταβ. παραμ/μεταβ σταθ.

Β-24 / φυλλάδιο με λύσεις
$\{y_1, y_2\}$ β.σ.λ (E_2^0)
$I = (-\infty, +\infty)$

→ Να αποδειχθεί ότι μεταξύ ~~...~~ δύο ριζών της y_1 υπάρχει ακριβώς μια ρίζα της y_2



ας είναι x_1, x_2 διαδοχικές ρίζες της λύσης ~~...~~ y_1

Υποθ. ότι $\exists\ \rho_1, \rho_2$ ρίζες της y_2 με $x_1 < \rho_1 < \rho_2 < x_2$
από την υπόθεση για την y_1 χ.β της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $y_1(x) > 0$, $x \in (x_1, x_2)$

Επειδή $\{y_1, y_2\}$ β.σ.λ., η $W(y_1, y_2)(x)$ ~~...~~
~~...~~ διατηρεί σταθερό πρόσημο (x_1, x_2)

$$\frac{W(y_1,y_2)}{y_1^2(x)} = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}{y_1^2(x)} = \frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2(x)} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)'$$
$x \in (x_1, x_2)$.

→ $\frac{y_2}{y_1} \uparrow$ στο $(x_1, x_2) \Rightarrow 0 = \frac{y_2}{y_1}(\rho_1) < \frac{y_2}{y_1}(\rho_2) = 0$

άτοπο

$y_2(\rho) = 0$; $x_1 < \rho < x_2$

Άσκηση 25

$y' + ay = 0 \qquad a \in C((x_1, x_2))$.

Να αποδ. ότι αν η y λύση μη μηδενική τότε οι ρίζες της y είναι μεμονωμένες.

Υποθέτουμε ότι οι ρίζες του y έχουν σημείο συσσώρευσης $x_0 \in \mathbb{R}$

χ.β της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < x_0$ είναι μια γν. ~~...~~ ακολουθία ριζών της y με $\lim x_n = x_0$

<u>Παρατηρώ ότι</u> $\lim\limits_{n\to\infty} y(\overset{0}{\overset{\|}{x_n}}) = y(x_0) \Rightarrow y(x_0) = 0$.

(x_0 ρίζα της y)

(από το θ. Bolzano) $\exists\, \rho_n \in (x_n, x_{n+1}) : y'(y_n) = 0$.

Προφανώς $\rho_n \to x_0 \qquad x_n < \rho_n < x_{n+1}$

x_0. από θ. ισοσυγκλινουσών.

και ~~...~~ $\lim y'(\rho_n) = y'(x_0) = 0$.

$y(x_0) = 0 = y'(x_0) \Rightarrow y \equiv 0$. άτοπο

άρα οι ρίζες δεν έχουν σ.σ είναι μεμονωμένες

B-16 / λυμ.

$y = z \cdot e^{x^2} \rightsquigarrow y'' - 4xy' + (4x^2-1)y = e^{x^2}$.

$z'' e^{x^2} + 2z' \, 2x \cdot e^{x^2} + z(2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2})$

$- 4x(z' e^{x^2} + 2x \cdot e^{x^2} z) + (4x^2-1) z \cdot e^{x^2} = e^{x^2}$.

$\Rightarrow z'' + z = 1$.

$z'' + z = 0$

χ.π $\lambda^2 + 1 = 0$, ± 1

$\left\{ (\cos x, \sin x) \atop \text{B.σ.λ} \right\}$

$z_\mu = c \Rightarrow c = 1$

$z_\mu = 1$

$z(x) = 1 + c_1 \cos x + c_2 \sin x$.

B-20 / λυμ. $y'' + w^2 y = A\cos(wx)$, $x \geq 0$.

w, A σταθ.

$\rightsquigarrow \limsup_{+\infty} |y(x)| = +\infty$

$y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

$y'' + w^2 y = 0$

χ.π $\lambda^2 + w^2 = P(\lambda) \longrightarrow \lambda_{1,2} = \pm w$

B.σ.λ $\{\cos wx, \sin wx\}$.

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos wx & \sin wx \\ -w\sin x & w\cos x \end{vmatrix} = w$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \sin\omega x \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\sin\omega x$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} \cos\omega x & 0 \\ & 1 \end{vmatrix} = \cancel{\quad} \cos\omega x.$$

$$y_1(x) = y_1(x) \int_0^x \frac{w_1(s)}{w(s)} \frac{b(s)}{a_2(s)}\, ds + y_2(x) \int_0^x \frac{w_2(s)}{w(s)} \frac{b(s)}{a_2(s)}\, ds$$

$$= \cos(\omega x) \int_0^x -\frac{\sin(\omega s)}{\omega} A \cos(\omega s)\, ds \cancel{\quad}$$

$$+ (\sin\omega x) \int_0^x \frac{\cos(\omega s)}{\omega} A(\cos\omega s)\, ds$$

$$y_1(x) = \frac{1}{\omega} \int_0^x \left[\cos(\omega s) \sin(\omega s) + \sin(\omega x) \cos(\omega s) \right] \cos(\omega s)$$

$$y_1(x) = \frac{A}{\omega} \left[-\cos(\omega x) \int_0^x \overbrace{\sin(\omega s)\cos(\omega s)}^{\frac{\sin(2\omega s)}{2}}\, ds + \right.$$

$$\left. \sin(\omega x) \int_0^x \underbrace{\cos^2(\omega s)}_{\frac{\cos(2\omega s) + 1}{2}}\, ds \right]$$

$$= \frac{A}{2\omega} \left[-\cos(\omega x) \left[-\frac{\cos(2\omega s)}{2} \right]_0^x + \cancel{\quad} \right.$$

$$\left. \sin(\omega x) \left[\frac{\sin(2\omega s)}{2} + \frac{s}{2} \right]_0^x \right\}.$$

$$\Rightarrow y_1(x) = \frac{A}{2\omega} x \sin\omega x, \quad x \geq 0.$$

$$y(x) = c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x) + \frac{A}{2\omega} x \sin(\omega x), \quad x \geq$$

$\omega x_1 = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$

$x_1 = \frac{2n\pi + \frac{\pi}{2}}{\omega} \to 0.$

$y(x_0) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 + \frac{A}{2\omega} \cdot x_1 \cdot 1.$

$|y(x_0)| = \left| c_2 + \frac{A}{2\omega} \frac{(n+1)\pi}{2\omega} \right| \to +\infty.$

B-22 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 1 + x$ (E)

$p, q \in C(\mathbb{R})$

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (E_0)

αν $y_1 = (1+x)^2$, $x \in \mathbb{R}$ λύση και ω δύο οποιεσδήποτε λύσεων είναι σταθερή να επιλυθεί $n \in \{1,$

$$\begin{vmatrix} (1+x^2)^2 & y_2 \\ 2(1+x) & y_2' \end{vmatrix} = c_1$$

$$\Rightarrow \frac{y_2'(1+x^2) - 2(1+x)y_2}{(1+x)^4} = \frac{c_1}{(1+x)^4}$$

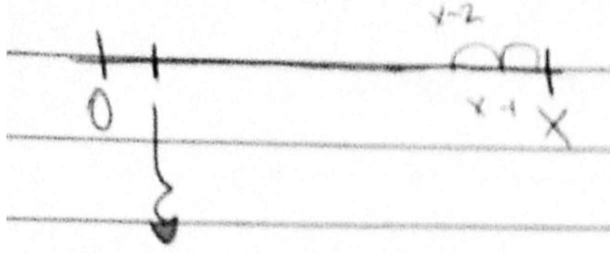
$$\left(\frac{y_2}{(1+x)^4}\right)' = \frac{c}{(1+x)^4} \rightsquigarrow \frac{y_2(x)}{(1+x^2)} = -\frac{1}{3}\frac{c}{(1+x)^3}$$

B-5 $b \in C([0,+\infty))$ $\exists\, c \geq 0 : \int_x^{x+1} |b(s)|\,ds \leq c$ $\forall x \geq 0$.

$\rightsquigarrow e^{-x}\int_0^x e^s |b(s)|\,ds \leq c_1 \frac{e}{e-1}$ // $\rightsquigarrow$ όλες οι λύσεις της

$y'' + 2y' + \cancel{2y}\, 7y = b$

είναι φραγμ. στο $[0, +\infty)$



$x-[x]$.

$$e^{-x}\int_0^x e^s|b(s)|ds = e^{-x}\Big\{\int_0^{x-[x]} e^s|b(s)|ds + \int_{x-[x]}^{x-[x]+1} e^s|b(s)|ds + \int_{x-2}^{x-1} e^s|b(s)|ds + \int_{x-1}^{x} e^s|b(s)|ds\Big\}$$

$$\le e^{-x}\Big\{e^{x-[x]}\int_0^{x-[x]}|b(s)|ds + e^{x-[x]}\int_0^{x-[x]+1}|b(s)|ds + e^{x}\int_{x-2}^{x-1}|b(s)|ds + e^{x-2}\int_{x-1}^{x}|b(s)|ds\Big\}$$

$$\le e^{-x}\Big\{e^{x-[x]}\cdot C + e^{x-[x]+1} C_2 + \dots + e^{x-1} C + e^{x} C\Big\}$$

$$= e^{-x}\cdot e^{x}\Big\{\underbrace{e^{-[x]} + e^{-[x]+1}\cdot 1 + \dots + e^{-1} + 1}\Big\}$$

$1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \dots + \frac{1}{e^{[x]}}$ $\quad \lambda = \frac{1}{e} \in (-1,1)$

↳ η σειρά συγκλίνει.

↳ $\le \frac{1}{1-\frac{1}{e}}$

$$\le C\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^{\nu} = C\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{e}} = C_1\cdot\frac{e}{e-1}$$

- $y''+2y'+2y=b$.

$y''+2y'+2y=0$

χ.π) $\lambda^2+2\lambda+2=P(x)$. $\Rightarrow \lambda_{1,2}=-1+i$

Β.Σ.Λ $\{e^{-x}\cos x,\ e^{-x}\sin x\}$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-x}\cos x & e^{-x}\sin x \\ -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x & -e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x \end{vmatrix}$$

$$= -e^{-2x}\cos x \sin x + e^{-x}\cos^2 x + e^{-2x}\sin x\cos x + e^{-x}\sin^2 x$$

$$= e^{-x} w(x)$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & e^{-x}\sin x \\ 1 & \end{vmatrix} = -e^{-x}\sin x.$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} e^{-x}\cos x & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = e^{-x}\cos x$$

$$y_1(x) = e^{-x}\cos x \int_0^1 \frac{-e^{-s}\sin s\, b(s)}{e^{-s}} + e^{-x}\sin x \int \frac{e^{-s}\cos s\, b(s)}{e^{-s}} ds$$

$$= e^{-x}\int_0^1 [-\cos x \sin s + \sin x \cos s]\, b(s)\, ds$$

$$\Rightarrow y_1(x) = e^{-x}\int_0^x \sin(x-s)\, b(s)\, ds.$$

Παρατηρώ ότι οι y_1, y_2 είναι φραγμένες συναρτήσεις στο $(0, +\infty)$

$$|y_1(x)| \le e^{-x}\int_0^x |\sin(x-s)|\, (b(s))ds.$$

$$\le e^{-x}\int_0^x |b(s)|\, e^s\, ds$$

$$\overset{(1)}{\le} c\cdot\frac{e}{e-1} \sim |y(x)| \le |c_1||y(x)| + |c_2||y_2(x)| \ldots$$